Eigenschaften Gaußscher Strahlen

http://www.siart.de/lehre/gaussoptik.pdf

Uwe Siart
tutorien@siart.de

15. September 2013 (Version 0.19)

Inhaltsverzeichnis

1 Herleitung

Die Feldverteilung Gaußscher Strahlen stellt ebenso wie ebene Wellen oder sphärische Harmonische eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen im quellenfreien Raum dar, welche bekanntlich mit Hilfe des Hertzschen Vektors durch Lösung der skalaren Helmholtz-Gleichung

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{r}) + k^2 \psi(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{1}$$

unter Verwendung des Separationsansatzes

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{2}$$

gewonnen werden können [10, 7, 11]. In (1) ist ∇^2 der Laplace-Operator und $k = 2\pi/\lambda$. Beschränkt man sich bei der Lösungssuche auf Wellenausbreitung in z-Richtung, dann lautet die Ansatzfunktion

$$\psi(x, y, z) = U(x, y, z) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \,, \tag{3}$$

wobei $U(x, y, z)$ alle Unterschiede der gesuchten Lösung zur ebenen Welle enthält [8]. Mit (3) und der Annahme schwachen Variation in z-Richtung ($\partial^2 U/\partial z^2 \approx 0$) erhält man für U die Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2\mathrm{j}k\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \,. \tag{4}$$

Die Lösungen sind Produkte aus transversalen Gaußfunktionen und Hermite-Polynomen. Die Lösung mit der niedrigsten Ordnung (Grundmodus) kann in Zylinderkoordinaten in der Form

$$\psi = A\frac{w_0}{w(z)}\ \exp\left\{\frac{-r^2}{w(z)^2}\right\}\ \exp\left\{-\mathrm{j}\left(kz + \frac{\pi r^2}{\lambda R(z)} - \arctan\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right)\right\}\ . \tag{5}$$

dargestellt werden. Sie repräsentiert einen *nichtastigmatischen Gaußschen Strahl* mit exponentieller Amplitudenabnahme in radialer Richtung, gekrümmten Phasenfronten und linearer Phasenabnahme in z-Richtung [8, 9, 13].

2 Beschreibung Gaußscher Strahlen

Die Kenngrößen, welche einen nichtastigmatischen Gaußschen Strahl zusammen mit seiner Ausbreitungsrichtung z und dem Ort $z = 0$ seiner Strahltaille vollständig beschreiben, sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Für einen astigmatischen Strahl mit unterschiedlichen Strahltaillen in x- und y-Richtung ergeben sich auch zwei verschiedene Rayleighlängen und damit verschiedene normierte Koordinaten ζ_x und ζ_y. Die *Strahlweite* oder *Strahlkontur* $w(z)$ ist mit der auf die Rayleighlänge z_R bezogenen Längenkoordinate ζ gegeben durch

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\zeta^2}\ . \tag{6}$$

Sie bezeichnet den Abstand von der Strahlachse, bei dem die elektrische Feldstärke auf $1/\mathrm{e}$ des Maximalwerts abgefallen ist. Die Strahlkontur ist hyperbolisch und alleine durch die Frequenz f und die Strahltaille w_0 festgelegt. Ihr Verlauf ist zusammen mit den anderen Geometrieparametern in Abb. 1 dargestellt. Quasioptische Bauelemente (Linsen und Spiegel), die mindestens bis zur $2w(z)$-Kontur reichen, verursachen keine nennenswerten Verluste. Die Strahlweite hat den *Fernfeldöffnungswinkel*

$$2\Theta = 2\arctan\frac{w_0}{z_\mathrm{R}} = 2\arctan\frac{\lambda}{\pi w_0}\ . \tag{7}$$

Tabelle 1: Kenngrößen eines nichtastigmatischen Gaußschen Strahls

Kenngröße	Berechnung
Strahltaille	$w_0 = w(z=0)$
Wellenzahl	$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$
Rayleighlänge	$z_\mathrm{R} = \frac{\pi {w_0}^2}{\lambda}$
normierte Koordinate	$\zeta = \frac{z}{z_\mathrm{R}}$
q-Parameter	$q(\zeta) = z_\mathrm{R}(1+\mathrm{j}\zeta)$

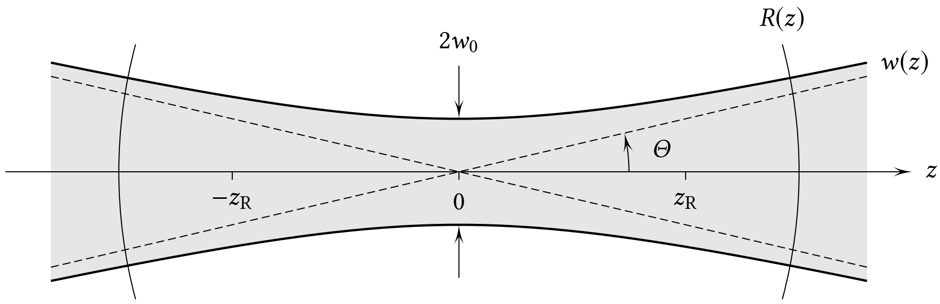

Abb. 1: 1/e-Kontur eines Gaußschen Strahls. $z = 0$ ist der Ort der Strahltaille.

Der *Krümmungsradius* $R(z)$ der Phasenfront am Ort z ist gegeben durch

$$R(z) = z_R \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \ . \tag{8}$$

Er wird sowohl für $z \longrightarrow 0$ als auch für $z \longrightarrow \infty$ unendlich groß, das heißt, die Phasenfronten sind sowohl in der Strahltaille als auch in sehr großer Entfernung von der Strahltaille eben. Der normierte Verlauf des Krümmungsradius ist in Abb. 2 dargestellt. Man erkennt auch, dass der kleinste Krümmungsradius bei der Rayleighlänge $z = \pm z_R$ auftritt und dass dort $R(z) = 2z_R$ ist. Der Krümmungsmittelpunkt der Phasenfront bei $z = \pm z_R$ liegt also jeweils bei $z = \mp z_R$.

Die *elektrische Feldstärke* ist bei Polarisation in x-Richtung gegeben durch

$$E_x = \hat{E}_x \, \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{j}\zeta}} \, \exp\left\{ -\mathrm{j} \frac{kr^2}{2q(\zeta)} \right\} \tag{9a}$$

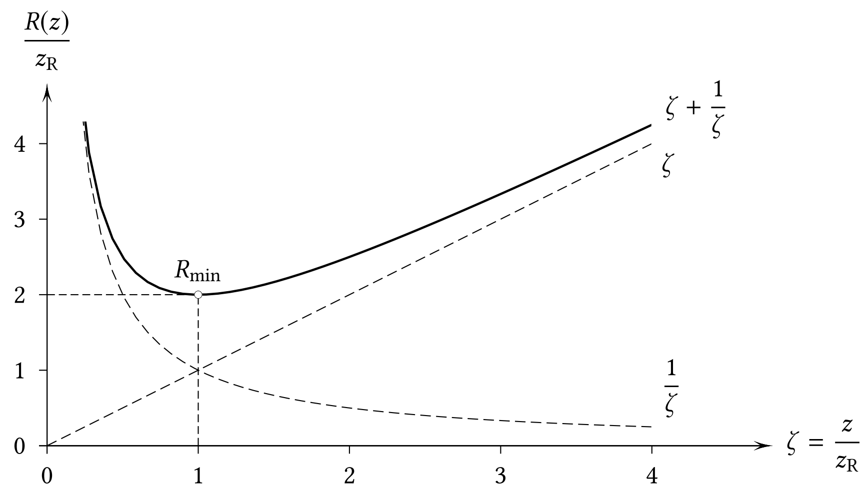

Abb. 2: Normierte Abhängigkeit des Krümmungsradius der Phasenfronten vom Abstand von der Strahltaille.

und bei einem astigmatischen Strahl durch

$$E_x = \hat{E}_x \, \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{j}\zeta_x}} \, \exp\left\{-\mathrm{j}\frac{kx^2}{2q_x(\zeta_x)}\right\} \, \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{j}\zeta_y}} \, \exp\left\{-\mathrm{j}\frac{ky^2}{2q_y(\zeta_y)}\right\} \; . \tag{9b}$$

Zwischen $R(z)$, $w(z)$ und $q(z)$ besteht die feste Beziehung

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \mathrm{j}\frac{2}{kw(z)} \; . \tag{10}$$

Literatur

[1] M. Boheim: "Focusing Mirrors for Gaussian Beams". In: *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest.* Vol. 3. Long Beach, CA, June 13–15, 1989, pp. 1255–1258.

[2] P. F. Goldsmith: "Gaussian Beam Transformation with Cylindrical Lenses". In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* AP-34.4 (April 1986), pp. 603–607.

[3] P. F. Goldsmith: *Quasioptical Systems. Gaussian Beam Quasioptical Propagation and Applications.* New York: IEEE Press/Chapman & Hall, 1998.

[4] P. F. Goldsmith: "Quasi-Optical Techniques". In: *Proceedings of the IEEE* 80.11 (November 1992), pp. 1729–1747.

[5] P. F. Goldsmith: "Quasi-optical techniques at millimeter and submillimeter wavelengths". In: *Infrared and Millimeter Waves.* Ed. by K. J. Button. Vol. 6. New York: Academic, 1982, pp. 272–343.

[6] P. F. Goldsmith: "Quasioptical Techniques Offer Advantages at Millimeter Frequencies". In: *Microwave Systems News* (December 1983), pp. 65–84.

[7] A. Ishimaru: *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering.* Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.

[8] H. Kogelnik and T. Li: "Laser Beams and Resonators". In: *Proceedings of the IEEE* 54.10 (October 1966), pp. 1312–1329.

[9] N. J. McEwan and P. F. Goldsmith: "Gaussian Beam Techniques for Illuminating Reflector Antennas". In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* AP-37.3 (March 1989), pp. 297–304.

[10] E. J. Rothwell and M. J. Cloud: *Electromagnetics.* Boca Raton: CRC Press, 2001.

[11] K. Simonyi: *Theoretische Elektrotechnik.* 10. Aufl. Leipzig: Barth, Edition Dt. Verlag der Wissenschaften, 1993.

[12] M. K. Thumm and W. Kasparek: "Passive High-Power Microwave Components". In: *IEEE Transactions on Plasma Science* PS-30.3 (June 2002), pp. 755–786.

[13] J. Tuovinen: "Accuracy of a Gaussian Beam". In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* AP-40.4 (April 1992), pp. 391–398.

[14] R. J. Wylde: "Millimetre-wave Gaussian beam-mode optics and corrugated feed horns". In: *IEE Proceedings* 131.4 (August 1984), pp. 258–262.

[15] R. J. Wylde and D. H. Martin: "Gaussian Beam-Mode Analysis and Phase-Centers of Corrugated Feed Horns". In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* AP-41.10 (October 1993), pp. 1691–1699.